TITLE:

Non-vanishing of the value of L-functions attached to primitive forms at a fixed point on the critical line (Analytic number theory and related topics)

AUTHOR(S):

市原, 由美子

CITATION:

市原, 由美子. Non-vanishing of the value of L-functions attached to primitive forms at a fixed point on the critical line (Analytic number theory and related topics). 数理解析研究所講究録 2010, 1710: 29-41

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/170201

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 29-41

Non-vanishing of the value of L-functions attached to primitive forms at a fixed point on the critical line

広島大学大学院工学研究科 市原由美子 (Yumiko Ichihara)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の $\mathbb{Q}$-有理点全体は有限生成アーベル群であることが Mordell の定理によって知られており、その階数は Mordell-Weil 階数と呼ばれており、BSD 予想 (Birch and Swinnerton-Dyer conjecture) によって対応する L-関数 $L(E,s)$ の関数等式の折り返しの点 $(s=1)$ における零の位数と一致していると予想されている。また、楕円曲線 E の導手を N とすると、L-関数 $L(E,s)$ に対して重さが 2 の 自明な指標を持つ $\Gamma_0(N)$ に関する primitive form f に付随する L-関数 $L_f(s-1/2)$ が有限個の Euler factor を除いて一致している。従って BSD 予想への興味から $s=1/2$ における $L_f(s)$ の零の位数に興味がある。特に位数が 0、つまり non-vanishing となる場合に関しては 1995 年以降に様々な L 関数に対して多くの結果が出されており、それらには次の Duke の結果が大きな影響を与えている。

定理 (Duke [4], 1995). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。N を q と互いに素な素数とする。十分大きな $N_0=N_0(q)$ と絶対定数 C が存在し、$N>N_0$ に対して次が成立する。

$$\#\{f\in B_2(N)\mid L_f(1/2,\chi)\neq 0\}>\frac{CN}{(\log N)^2}$$

ここで $B_k(N)$ は重さ k の $\Gamma_0(N)$ に関する cusp form 全体の空間の直交基底であり、特にこの定理の仮定の下では $B_2(N)$ は primitive form 全体と取ることができる。

Duke と同じ条件で χ が自明な指標の場合、Duke の結果は Kowalski and Michel [11] によって改良されている。

また、零の位数が 0 以外の場合も当然調べられるべきものである。零の位数の upper bound は Mestre [13] や R. Murty [14] によって Wiel の明示公式を利用した研究がされ、2000 年には Kowalski, Michel and VanderKam [12] によって重さ 2 の $\Gamma_0(N)$ に関する primitive form について N が十分に大きい素数であれば 99% の primitive form f に対して $L_f(s)$ の $s=1/2$ における零の位数が 4 以下であることを示されている。

2 cusp form

cusp form について基礎的な情報をまとめておく。k を偶数とし、N を自然数として、重さ k でレベル N の $\Gamma_0(N)$ に関する cusp form 全体の空間を $S_k(N)$ とする。つまり上半平面で定義される関数 f で $\gamma \in GL_2(\mathbb{R})^+$ に関する作用を

$$(f|_k\gamma)(z) = (\det\gamma)^{k/2}(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+d}{cz+d}\right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とした時、

$$\gamma \in \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})\ ;\ c \equiv 0 \mod N \right\}$$

の作用について不変で cusp で 0 となる正則関数全体を指す。cusp form f は Fourier 級数展開でき、

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f,\infty}(n) e^{2\pi i n z}$$

と書くことにする。これを「f の ∞ における Fourier 級数展開」と呼ぶ。$S_k(N)$ には Hecke 作用素が作用しており、その同時固有関数で $a_{f,\infty}(1) = 1$ としたものを normalized Hecke eigenform と呼ぶ。また $S_k(N)$ の内積を

$$\langle f, g \rangle_N = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)} y^{k-2} dxdy, \quad (z = x+iy)$$

として定義する。$S_k(N)$ の直交基底として normalized Hecke eigenform を取ることができる ([15] Theorem 4.5.4)。

N の約数 M について $S_k(M)$ は $S_k(N)$ の部分空間である。$M \mid N$ で $M \neq N$ なる $S_k(M)$ について、その元 f に対して $f_{|\ell}$ を

$$f_{|\ell} = f|_k \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する。任意の $\ell \mid N/M$ について $f_{|\ell}$ は $S_k(N)$ に入る。言い換えれば、この対応で $S_k(N)$ には N より小さいレベルの cusp form で表せるものとそうでないものが入っていることになる。N より小さいレベルからくるもの、つまり $f \in S_k(N)$ について、$M \mid N\ (M \neq N)$ と $\ell \mid N/M$ と $h \in S_k(M)$ が存在して $f = h_{|\ell}$ と書ける時、f を old form と呼ぶ。また old form の空間

$$\{f_{|\ell} \mid f \in S_k(M),\ \ell \mid N/M,\ \ M \mid N\ (M \neq N)\}$$

の直交補空間に入るものを new form と呼ぶ。normalized Hecke eigen new form を今後 primitive form と呼び、$H_k(M)$ を重さ k の M に関する primitive form 全体とする。このとき $S_k(N)$ の直交分解を

$$S_k(N) = \bigoplus_{M|N} \bigoplus_{f\in H_k(M)} \langle f_{|\ell}\ ;\ \ell \mid N/M \rangle$$

と書くことができる。これは [8] に言及されている。実際の証明は [2] [16] による。今後 $B_k(N)$ は $H_k(N) \subset B_k(N)$ となるように取ることにする。

3 背景

楕円曲線の L-関数は重さ 2 の primitive form の L-関数に対応する。既に言及したように Duke の結果では

$$\#\{f \in B_2(N) \mid L_f(1/2, \chi) \neq 0\}$$

の lower bound が示されているが、N は 素数 と制限されているので $B_2(N)$ と $H_2(N)$ とは一致している。しかし、一般的には $B_k(N)$ として $H_k(N)$ を取ることはできない。

Duke の結果の後、Akbary や Kamiya によって次が示された。

定理 (Akbary [1], 1999). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。N を q と互いに素な 素数 とする。十分大きな $N_0 = N_0(q,k)$ と正定数 $C = C(k)$ が存在し、$N > N_0$ に対して

$$\#\{f \in H_2(N) \mid L_f(1/2, \chi) \neq 0\} > \frac{CN}{(\log N)^2}$$

が成立する。

定理 (kamiya [9], 2000). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。y は実数、N を q と互いに素な 自然数 とする。十分大きな $N_0 = N_0(q, |y|, k)$ と絶対定数 C が存在し、$N > N_0$ に対して

$$\sum_{f\in\mathcal{F},\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0} |a_{f,\infty}(1)|^2 \geq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}\frac{C}{\log N}$$

次が成立する。ここで $\mathcal{F}$ は $S_k(N)$ の正規直交基底。

kamiya の結果を正規直交基底ではなく、直交基底である normalized Hecke eigenform 全体 $\mathcal{F}' = \{g\}$ で書き直してみる。$f = g/\sqrt{\langle g, g\rangle}$ として Kamiya の結果を用いて、

$$\sum_{g\in\mathcal{F}',\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0} \frac{1}{\langle g, g\rangle} \geq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}\frac{C}{\log N}$$

が得られる。Banks [3] により $GL(3)$ の L-関数の Siegel の零点の非存在が示されているので、Hoffstein and Lockhart [5] の結果と合わせると g が new form であれば

$$\langle g, g\rangle \gg_k \frac{N}{\log N} \tag{1}$$

であることが分かっている（Hoffstein and Lockhart の論文での内積の定義と本稿の内積の定義は $\mathrm{vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{H})$ のズレがあることを注意しておく）。以上より次が分かる。

定理 (kamiya [9], Banks [3], Hoffstein-Lockhart [5]). χ を mod q の primitive な Dirichlet 指標とする。実数 y を固定して、N を q と互いに素な <u>自然数</u> とする。

$$M > \max_{f\in B_k(N)-H_k(N)} \frac{1}{\langle f, f\rangle}$$

とすれば、十分大きな $N_0 = N_0(q, |y|, k)$ と正定数 $C = C(k)$ が存在し、$N > N_0$ に対して

$$\#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2 + iy, \chi) \neq 0\} > \frac{C}{\log N} \min\left\{\frac{N}{\log N}, \frac{1}{M}\right\}$$

が成立する。

BSD-予想の観点に立てば $H_k(N)$ に興味があるので、Akbary の結果を一般の自然数 N に拡張することを考える。

4 L-関数

まず保型 L-関数の定義や性質を紹介する。k と N はそれぞれ偶数と自然数として、$f \in S_k(N)$ は normalized Hecke eigenform とする。f の Fourier 係数 $a_{f,\infty}(n)$ に対して $\lambda_{f,\infty}(n) = a_{f,\infty}(n)/n^{(k-1)/2}$ と置き、$\Re(s) > 1$ で L-関数を

$$L_f(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^s}$$

と定義する。ここで χ は mod q の Dirichlet 指標で $(q, N) = 1$ である。この L-関数は全 $\mathbb{C}$-平面に正則に解析接続され、次の関数等式を持つ。

$$\Lambda_N(s; f, \chi) = i^k C_\chi \Lambda_N(1 - s; f|_k\omega_N, \overline{\chi}), \tag{2}$$

ここで

$$\Lambda_N(s; f, \chi) = \left(\frac{q\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L_f(s, \chi)$$

であり、

$$\omega_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

で、C_χ は大きさ 1 の数。また

$$(f|_k\omega_N)(z) = (f|_k\sigma_0)(z), \quad \sigma_0 = \sigma_{0,N} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{N}^{-1} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$$

が成立している。$f|_k\omega_N$ の Fourier 級数展開を「f の 0 における Fourier 級数展開」と呼び、

$$(f|_k\omega_N)(z) = (f|_k\sigma_0)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f,0}(n)e^{2\pi inz} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{f,0}(n)n^{\frac{k-1}{2}}e^{2\pi inz}$$

と書くことにする。f が primitive form であれば

$$(f|_k\omega_N)(z) = (f|_k\sigma_0)(z) = \pm f$$

となる。

5 Duke の結果の証明方法

$f \in H_k(N)$ に対する $L_f(1/2+iy,\chi)$ の non-vanishing を考える前に、まず Duke, Akbary, Kamiya の証明のストーリーを紹介する。Cauchy の不等式によって

$$\left| \sum_{f\in B_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\langle f,f\rangle} \right|^2 \le \sum_{\substack{f\in B_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} \sum_{f\in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2+iy,\chi)|^2}{\langle f,f\rangle} \tag{3}$$

が得られる。$M \ge \max\{1/\langle f,f\rangle_N\}$ とすれば、右辺の最初の和は

$$\sum_{\substack{f\in B_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} \ll_k \#\{f\in B_k(N) \mid L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0\}M \tag{4}$$

と評価される。ここで、Duke の結果が出た当時はまだ Banks の結果はなかったが、N が素数であれば $f \in H_2(N) = B_2(N)$ は $GL(1)$ からのリフトではなく (1) が成立することが分かっており、$M = \log N/N$ とすることができたことを注意しておく。従って左辺の first moment

$$\sum_{f\in B_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\langle f,f\rangle} \tag{5}$$

の lower bound と右辺の second moment

$$\sum_{f\in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2+iy,\chi)|^2}{\langle f,f\rangle} \tag{6}$$

の upper bound を得ることができれば (3) と (4) と合わせて結果が得られることが分かる。(5), (6) は近似関数等式と Petersson's formula を用いて調べられる（そのために (3) において内積で割ったものを扱っている）。近似関数等式は色々なタイプがあるが、

$$L_f\left(\frac{1}{2}+iy,\chi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+iy}}e^{-(\frac{n}{X})^h}-I \tag{7}$$

を利用する。ここで I は

$$I=\frac{i^kC_\chi}{2\pi i}\int_{(d)}\left(\frac{4\pi^2}{q^2N}\right)^{s+iy}G_k\left(s+\frac{1}{2}+iy\right)X^s\frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{h}\right)}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,0}(n)\overline{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}-s-iy}}\,ds.$$

である。右辺の積分路の (d) は $d-i\infty$ から $d+i\infty$ への積分（d は実数とする）を意味する。また $G_k(s)$ は $L_f(s,\chi)$ の関数等式からくる Gamma factor で、

$$G_k(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right)}$$

である。h や d の取り方は今は深く考えないでおけば、この表示を用いることによって first moment や second moment が $\lambda_{f,\infty}(n)$, $\lambda_{f,0}(m)$ やそれらの積の和、和は $f\in B_k(N)$ を亙るもの、で表せることが見て取れる。それらには次の Petersson's formula

$$\begin{aligned}\Delta_{k,N}(m,n;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=&\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}}\sum_f\frac{\overline{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(m)}\lambda_{f,\mathfrak{b}}(n)}{\langle f,f\rangle_N}\\ =&\delta_{m,n}\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\\ &+2\pi i^{-k}\sum_{c\in\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}c^{-1}S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n;c)J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

を用いることができる（Iwaniec [7] の section 4.2 を参照)。ここで $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ は ∞ 又は 0 をとる。$\delta_{*,\dagger}$ は Kronecker の記号、J_{k-1} は J-Bessel 関数で、$S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ は Kloosterman 和を意味していて、

$$S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n;c)=\begin{cases}S(m,n,\ell N) & \text{if }\ \mathfrak{a}=\mathfrak{b}\\ S(m\overline{N},n,\ell) & \text{if }\ \mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}\end{cases}$$

であり、$\overline{N}$ は $N\overline{N}\equiv 1 \bmod \ell$ なるものとする。また (8) の右辺の c に関する和は次を亙る。

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\begin{cases}\{c=\ell N\ :\ \ell\in\mathbb{N}\} & \text{if }\ \mathfrak{a}=\mathfrak{b}\\ \{c=\ell\sqrt{N}\ :\ \ell\in\mathbb{N}\text{ and }(\ell,N)=1\} & \text{if }\ \mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}.\end{cases}$$

Kloosterman 和や J-Bessel 関数の評価はよく分かっているので、first moment (5) については asymptotic formula が得られて lower bound が分かり、second moment (6) については upper bound が得られる。従って (3) と (4) から

$$\#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2+iy,\chi) \neq 0\}$$

の lower buund が得られる。Duke の証明のストーリーはこのような論法による。3章で紹介した Akbary や Kamiya の結果も基本的にこの証明方針である。Kamiya の結果は $\max\{\langle f,f\rangle\}$ が old form に対して評価できないので M を具体的に取れず、1st Fourier 係数の和の lower bound という結果になっている。N が素数の場合は $S_k(N)$ の old form は $S_k(1)$ からくるもののみなので、Akbary は (4) を old form と new form に分けて、old form のノルムを評価し、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f\in B_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} &< \sum_{\substack{f\in H_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} + \sum_{\substack{f\in B_k(N)-H_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} \\ &\ll_k \#\{f \in B_k(N) \mid L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0\}\frac{\log N}{N} + \dim S_k(1)\frac{1}{N}. \end{aligned}$$

を導いて結果を得た。

この章の内容に関しては Kamiya [10] の記事も興味深いので参照されたし。

6 目的と問題

さて3章の最後に述べたように、$f \in H_2(N)$ に関しての $L_f(1/2)$ の non-vanishing について考察したい。Duke の論法を用いるのであれば Petersson's formula が $S_k(N)$ の直交基底 $B_k(N)$ を亘るので、Akbary のように一旦 $B_k(N)$ の和を取り、そこから $H_k(N)$ の和を取り出すという操作は避けられない。しかし、もし $H_k(N)$ の和を $B_k(N)$ の和から $B_k(M), M < N$ の和を引くことで表現できるのであれば、$H_k(N)$ の和に対して Petersson's formula を適用できるので、Duke の論法を $H_k(N)$ の和に対して展開することができる。つまり (3) でなく、

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{f\in H_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\langle f,f\rangle}\right|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{f\in H_k(N)\\ L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0}} \frac{1}{\langle f,f\rangle} \sum_{f\in H_k(N)} \frac{|L_f(1/2+iy,\chi)|^2}{\langle f,f\rangle} \end{aligned}$$

を考える。ここで second moment については Kamiya による一般論により

$$\sum_{f\in H_k(N)} \frac{|L_f(1/2+iy,\chi)|^2}{\langle f,f\rangle} < \sum_{f\in B_k(N)} \frac{|L_f(1/2+iy,\chi)|^2}{\langle f,f\rangle} \ll_k \log N$$

が分かっている。更に (1) が $f \in H_k(N)$ に対して成立しているので、

$$\left| \sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f\left(\frac{1}{2}+iy,\chi\right)}{\langle f,f\rangle} \right|^2$$

$$\ll_k \#\{f \in H_k(N) \mid L_f(1/2+iy,\chi) \neq 0\} \frac{(\log N)^2}{N} \tag{9}$$

が既に分かっている。従って問題は左辺の first moment

$$\sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\langle f,f\rangle}$$

の asymptotic formula を得ることである。得られれば、そこから first moment の lower bound を得ることができ、目的の lower bound を示すことができる。

今後は Petersson's formula を用いることを見越して

$$\sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\omega_{k,N}(f)} = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in H_k(N)} \frac{L_f(1/2+iy,\chi)}{\langle f,f\rangle} \tag{10}$$

を考えることにする。

7 直交基底

first moment (10) に Petersson's formula を適用させるために $H_k(N)$ を亙る和を $B_k(*)$ を用いて表す必要がある。そこで2章の最後に述べたように

$$S_k(N) = \bigoplus_{M|N} \bigoplus_{f \in H_k(M)} \langle f_{|\ell}\,;\, \ell \mid N/M\rangle$$

であるので old form の空間 $\langle f_{|\ell}\,;\, \ell \mid N/M\rangle$ の直交基底を決める必要がある。

実は Iwaniec, Luo and Sarnak [8] が N が square-free の場合に old form の空間の直交基底を作っている。しかし、その直交基底は分母に primitive form の pth Fourier 係数が含まれており (p は素数)、Petersson's formula をそのまま利用できる形になっていない。ただ $p \mid N$ であれば Fourier 係数の値に関しては十分な情報があるので、$N = p^a$ の形の場合を考えることにする。p がレベルを割っていることを必要としているので、$S_k(1)$ からくる old form は排除したい。従って、今後は p を素数として $N = p^a$, k は偶数で $0 < k < 12$ 又は $k = 14$ と制限して話を進める。

さて、old form の空間の直交基底を作る方法は Iwaniec, Luo and Sarnak に倣う。まず $E(z,s)$ を Eisenstein 級数

$$E(z,s) = y^{s-k+1} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(p^a)_\infty \backslash \Gamma_0(p^a)} |j(\gamma,z)|^{-2(s-k+1)}$$

を用いて

$$F(s) = \langle E(z,s)f(\ell_1 z)\ ,\ f(\ell_2 z)\rangle_{p^a}$$

を考え、これを $E(z,s)$ の留数で書いたものと Rankin-Selberg L-関数 $L_{f\otimes f}(s)$ の留数で書いたものを比較することで次の補題が得られる。

補題1. p は素数、k は偶数で $0<k<12$ 又は $k=14$ とする。$1\le m\le a$ として $f\in H_k(p^m)$ をとる。$0<\ell_i \mid p^{a-m}$ について

$$\langle f_{|\ell_1}, f_{|\ell_2}\rangle_{p^a} = \lambda_{f,\infty}(\ell)\ell^{-\frac{1}{2}}\langle f,f\rangle_{p^a}$$

が成立する。ここで　$\ell=\ell_1\ell_2(\ell_1,\ell_2)^{-2}$ である。

補題 1 を用いて old form の空間の基底が決定できる。

補題2. 補題 1 の仮定の下、$f\in H_k(p^m)$ について $f_1=f$ とし、$d\neq 1$ について

$$f_d = \begin{cases} d^{\frac{k}{2}}f(dz) & m\ge 2 \\ p\sqrt{p^2-1}^{\,-1}\left(d^{\frac{k}{2}}f(dz) - p^{-\frac{1}{2}}\lambda_{f,\infty}(p)\left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{k}{2}} f\left(\frac{dz}{p}\right)\right) & m=1 \end{cases}$$

とおくと、$S_k(p^a)$ は直交分解

$$S_k(p^a) = \bigoplus_{m=1}^{a}\ \bigoplus_{f\in H_k(p^m)}\ \bigoplus_{d|p^{a-m}} \langle f_d\rangle,$$

を持つ。更に $\langle f_d, f_d\rangle_{p^a} = \langle f,f\rangle_{p^a}$ が成立している。

N が square-free の場合、Iwaniec, Luo and Sarnak [8] の (2.45) がこの補題に対応している。ここでは N が素数冪なので彼らの結果より簡単な形になっている。この章の最初に述べたように Iwaniec, Luo and Sarnak の結果では (2.40) が分母に入るため、cusp form の Fourier 係数が分母に入る。Petersson's formula を利用したいので分母は f に依らない方が望ましい。この場合も実際は Iwaniec, Luo and Sarnak の結果と同様に $(1-\lambda_{f,\infty}(p)^2/p)^{1/2}$ が分母に入っている。しかし f のレベルが p で割れるので、$\lambda_{f,\infty}(p)^2 = 1/p$, または 0 が分かっていて（[15] Theorem 4.6.17 を参照）上記のような形で直交基底を得ることができるのである。補題 2 から次の補題がすぐに分かる。

補題3. 補題 2 の仮定の下、f_d $(d\neq 1)$ の Fourier 係数は

$$\lambda_{f_d,\infty}(n) = \begin{cases} d^{\frac{1}{2}}\lambda_{f,\infty}\left(\frac{n}{d}\right) & m\ge 2 \\ d^{\frac{1}{2}}p\sqrt{p^2-1}^{\,-1}\left(\lambda_{f,\infty}\left(\frac{n}{d}\right) - p^{-1}\lambda_{f,\infty}(p)\lambda_{f,\infty}\left(\frac{np}{d}\right)\right) & m=1 \end{cases}$$

と書ける。ここで、もし x が整数でなければ $\lambda_{f,\infty}(x)=0$ とする。

補題 2 より $B_k(p^a)$ を次のように取ることにする。

$$B_k(p^a) = \cup_{m=1}^{a} \cup_{f\in H_k(p^m)} \cup_{d|p^{a-m}} \{f_d\}$$

書き直すと

$$B_k(p^a) = H_k(p^a)\cup B_k(p^{a-1})\cup\left\{\cup_{m=1}^{a-1}\cup_{f\in H_k(p^m)}\{f_{p^{a-m}}\}\right\}$$

が分かる。

8 Asymptotic formula

近似関数等式 (7) を思い出す。今までは h や d の取り方には触れずにいたが、近似関数等式の証明を追いながら h や d の取り方を説明する。まず $X>0$ として

$$e^{-X^h}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}\frac{\Gamma(1+s/h)}{s}X^{-s}ds$$

であることから、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{1/2+iy}}e^{-(n/X)^h}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}L_f(s+1/2+iy,\chi)X^s\frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{h}\right)}{s}X^{-s}ds$$

が分かる。右辺の積分路を左に移動させることにより、

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,\infty}(n)\chi(n)}{n^{1/2+iy}}e^{(n/X)^h}\\&=\text{留数}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(d)}L_f(s+1/2+iy,\chi)X^s\frac{\Gamma(1+s/h)}{s}X^{-s}ds\end{aligned}$$

という式が得られる。留数から $L_f(1/2+iy,\chi)$ が表れ、右辺の被積分関数の L-関数を関数等式 (2) を用いて $L_f(1/2-s-iy,\overline{\chi})$ で書き、級数表示をすると近似関数等式 (7) が得られる。関数等式で折り返した L-関数を級数表示するためには $d<-1/2$ となるように d を取ればよい。

しかし、後に Petersson's formula を用いるためにこの近似関数等式に対して $f\in B_k(N)$ を亙る和を取りたいので、そこまで見越して d を設定する必要がある。近似関数等式に対して $f\in B_k(N)$ を亙る和を取り、$\sum_f$ と $\sum_{n=1}^{\infty}$ とを交換してみると、後に紹介する (12) によれば $\sum_f$ から $n^{(k-1)/2}$ くらいの大きさが出るので、それを込みで級数が収束するように d を設定する。従って $d<-1/2-(k-1)/2$ である必要があることが分かるので、$d=-k/2-\varepsilon$ と取る。

すると上記の積分路の移動によって出る留数は $-k/2-\varepsilon<\Re(s)<1$ の間にある極からということになる。$\Gamma(1+s/h)$ は $\Re(s)>-h$ で極を持たないので、留数を $L_f(1/2+iy,\chi)$ のみにするために $-h<-k/2-\varepsilon$ となるように h を取る。従って $0<\varepsilon<1/4,\ h=(k+1)/2$ としておく。

得られた近似関数等式 (7) を用いて first moment (10) を表すと

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in H_k(p^a)}\frac{L_f\left(\frac{1}{2}+iy,\chi\right)}{\omega_{k,p^a}(f)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)e^{-\left(\frac{n}{X}\right)^h}}{n^{\frac{1}{2}+iy}}\boxed{\sum_{f\in H_k(p^a)}\frac{\lambda_{f,\infty}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)}}-\frac{i^kC_\chi}{2\pi i}\int_{(c_1)}\left(\frac{4\pi^2}{q^2p^a}\right)^{s+iy}X^s\\&\times\frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{h}\right)}{s}G_k\left(s+\frac{1}{2}+iy\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\chi}(n)}{n^{\frac{1}{2}-s-iy}}\boxed{\sum_{f\in H_k(p^a)}\frac{\lambda_{f,0}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)}}ds\end{aligned}\qquad(11)$$

が得られる。さて、これから asymptotic formula を導くために、上の式の中で四角で囲んだ和

$$\sum_{f\in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} = \sum_{f\in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \quad (\mathfrak{a}=\infty, 0)$$

を Petersson's formula を用いて評価する必要がある。k を $H_k(p)=S_k(p)$ となるように制限していたので、$a=1$ であればそのまま Petersson's formula を利用できる。$a\geq 2$ の場合は $H_k(p^a)$ を $B_k(*)$ で書き直す必要がある。7 章の最後で見たことから

$$\begin{aligned}\sum_{f\in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} &= \sum_{f\in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \\ &= \sum_{f\in B_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} - \sum_{f\in B_k(p^{a-1})} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f,\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f)} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{a-1} \sum_{f\in H_k(p^m)} \frac{\lambda_{f_{p^{a-m}},\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f_{p^{a-m}},\infty}(1)}{\omega_{k,p^a}(f_{p^{m-a}})}\end{aligned}$$

と書ける。補題3より、$a\geq 3$ であれば $a-m\geq 1$ に対して

$$\lambda_{f_{p^{a-m}},\infty}(1)=0$$

である。また $H_k(p)=B_k(p)$ となるように k を設定したので、

$$\begin{aligned}\sum_{f\in H_k(p^a)} \frac{\lambda_{f,\mathfrak{a}}(n)}{\omega_{k,p^a}(f)} =&\Delta_{k,p^a}(n,1;\mathfrak{a},\infty) - \Delta_{k,p^{a-1}}(n,1;\mathfrak{a},\infty) \\ &+\begin{cases} 0 & a\geq 3 \\ \sum_{f\in H_k(p)=B_k(p)} \lambda_{f_p,\mathfrak{a}}(n)\lambda_{f_p,\infty}(1)\omega_{k,p^2}(f_p)^{-1} & a=2 \end{cases}\end{aligned}$$

が分かる。さて $\lambda_{f_p,\infty}(n)$ は補題3より $\lambda_{f,\infty}(*)$ で表せており、

$$\left(f_p|\sigma_{0,p^2}\right)(z) = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left(f(z)-p^{\frac{k-1}{2}}\lambda_{f,\infty}(p)f(pz)\right)$$

より

$$\lambda_{f_p,0}(n)=\begin{cases} \pm p\sqrt{p^2-1}^{-1}\lambda_{f,\infty}(n) & p\nmid n \\ 0 & p\mid n. \end{cases}$$

であるので、$\lambda_{f_p,0}(n)$ も $\lambda_{f,\infty}(*)$ で表せる。全て総合すると first moment (11) の四角の部分は $\Delta_{k,*}(*,1;*,\infty)$ の和を用いて書け、Petersson's formula (8) で扱えることが分かる。実際、$J_{k-1}(x)\ll_k x^{k-1}$ が知られており、Kloosterman 和については Weil の評価

$$|S_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n;c)|\leq (m,n,c)^{1/2}c^{1/2}d(c)$$

が分かっていることから

$$\Delta_{k,M}(m,1;\mathfrak{a},\infty)=\delta_{m,1}\delta_{\mathfrak{a},\infty}+\begin{cases}O_k(d(M)m^{\frac{k-1}{2}}M^{-k+\frac{1}{2}}) & \mathfrak{a}=\infty\\ O_k(m^{\frac{k-1}{2}}M^{-\frac{k}{2}}) & \mathfrak{a}=0\end{cases} \tag{12}$$

が得られる。従って次の定理が得られる。

定理（Y.I [6]）． $k=2,4,6,8,10,14$, p は素数、a を自然数とする。χ は mod q, $(q,p)=1$ の primitive な Dirichlet 指標。任意の実数 y を固定したとき

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}}\sum_{f\in H_k(p^a)}\frac{L_f\left(\frac{1}{2}+iy,\chi\right)}{\langle f,f\rangle_{p^a}}$$

$$=1-c(a)$$

$$+\begin{cases}O_k(p^{-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}}q^{\frac{k}{2}}(1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a=1\\ O_k(p^{-\frac{5}{4}}q^{\frac{k}{2}}(1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a=2\\ O_k((a+1)p^{-\frac{(a-1)k}{2}+\frac{(a-1)}{4}+\frac{k}{4}-1}q^{\frac{k}{2}}(1+|y|)^{\frac{k}{2}}) & a\geq 3\end{cases}$$

が成り立つ。ここで $c(a)$ は

$$c(a)=\begin{cases}0 & \text{if } a=1\\ p(p^2-1)^{-1} & \text{if } a=2\\ p^{-1} & \text{if } a\geq 3\end{cases}$$

である。

更に系として次が得られる

系（Y.I [6]）． 定理と同じ条件の下、十分大きい正定数 $M=M(a,k,q,|y|)$ 又は $M=M(p,k,q,|y|)$ と正定数 $C=C(k)$ が存在して、$p>M$ 又は $a>M$ に対して

$$\#\{f\in H_k(p^a)\mid L_f(1/2+iy,\chi)\neq 0\}>C(1-c(a))^2\frac{p^a}{(\log p^a)^2}.$$

が成り立つ。

参考文献

[1] A. Akbary, *Non-vanishing of weight k modular L-functions with large level*, J. Ramanujan Math. Soc. **14** (1999), no. 1, 37 - 54.

[2] A. O. L. Atkin and J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970) 134 - 160.

[3] W. D. Banks, *Twisted symmetric-square L-functions and the nonexistence of Siegel zeros on* $GL(3)$, Duke Math. J. **87** (1997), no. 2, 343 - 353.

[4] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. math. **119** (1995) 165 - 174.

[5] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994) 161 - 181.

[6] Y. Ichihara, *The first moment of automorphic L-functions over primitive forms on the critical line*, preprint.

[7] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics, **17**. American Mathematical. Society, Providence, RI, 1997.

[8] H. Iwaniec, W. Luo and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **91** (2000), 55 - 131.

[9] Y. Kamiya, *Certain mean values and non-vanishing of automorphic L-functions with large level*, Acta Arith. **93** (2000) no. 2, 157 - 176.

[10] 神谷諭一, 保型形式に付随する L 関数のある平均値と non-vanishing 定理について, 数理解析研究所講究録 **1160** (2000) 19 - 24.

[11] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of* $J_0(q)$ *and zeros of automorphic L-functions*, Duke. Math. J. **100** (1999) no. 3, 503 - 542.

[12] E. Kowalski, P. Michel and VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, J. Reine Angew. Math. **526** (2000) 1 - 34.

[13] J.-F. Mestre, *Formules explicites et minorations de conducteurs de varieties algebriques*, Compositio Math. **58** (1986) 253 - 281.

[14] M. Ram Murty, *The analytic rank of* $J_0(N)(\mathbb{Q})$, CMS Conf. Proc. **15** (1995) 263 - 277.

[15] T. Miyake, *Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[16] A. Ogg, *On a convolution of L-series*, Invent. Math. **7** (1969) 297 - 312.